



CONCURSUL NAȚIONAL  
DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
"ADOLF HAIMOVICI"



ETAPA JUDEȚEANĂ  
10 martie 2024

Clasa a XII-a – Secțiunea H2 – Profil real, specializarea științe ale naturii

### Subiectul 1.

Considerăm o funcție  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pentru care există  $T \in \mathbb{R}^*$ , astfel încât  $f(x + T) = f(x)$ ,  $(\forall)x \in \mathbb{R}$  și mulțimea  $G = \{T \in \mathbb{R} \mid f(x + T) = f(x), (\forall)x \in \mathbb{R}\}$ .

- Arătați că adunarea numerelor reale este lege de compoziție pe  $G$ .
- Demonstrați că  $(G, +)$  este grup abelian.
- Determinați grupul  $G$ , dacă funcția  $f$  este  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \{x\}$ , partea fracționară a numărului real  $x$ .

### Subiectul 2.

- Fie  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f, g$  continue pe  $[a, b]$  și  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ . Arătați că  $(\exists) c \in [a, b]$ , astfel încât  $f(c) = g(c)$ .
- Dați un exemplu de funcții  $f, g$  care verifică condițiile de la punctul a). Pentru funcțiile de la punctul b) calculați valoarea numărului  $c$ .

### Subiectul 3.

Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin^4 x$ .

- Exprimați  $\sin^2 x$  în funcție de  $\cos 2x$  și  $\sin^4 x$  în funcție de  $\cos 2x$  și  $\cos 4x$ .
- Calculați primitivele funcției  $f$  pe  $\mathbb{R}$ .
- Calculați  $\int_0^{\pi} f(x)dx$ .

### Subiectul 4.

O matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Q}$  se numește *cod*. Notăm cu  $G$  mulțimea acestor coduri și cu  $H$

mulțimea *codurilor* care comută cu toate codurile din  $G$ .

- Arătați că produsul a două *coduri* este *cod*.
- Demonstrați că  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{Q} \right\}$ .
- Arătați că  $(H, \cdot)$  este grup abelian neizomorf cu grupul  $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ .

**Notă:**

Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.