CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
10 martie 2024

Clasa a X–a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

Subiectul 1.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$.

b) $\frac{\log_2 x}{\log_4(2x)} = \frac{\log_8(4x)}{\log_{16}(8x)}$.

c) $\sqrt{\frac{5x-1}{x-1}} + \sqrt{\frac{x-1}{5x-1}} = \frac{10}{3}$.

Subiectul 2.

a) Fie $z = (3+5i)^{4n} + (5+3i)^{4n}$, unde i este unitatea imaginară și $n \in \mathbb{N}$. Arătați că z este număr real, pentru orice număr natural n.

b) Fie numerele complexe z_1, z_2 și z_3 cu proprietățile: $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$, $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ și $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Demonstrați că $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$.

Subiectul 3.

a) Arătați că $(\lg 5)^3 + (\lg 20)^3 + (\lg 8) \cdot (\lg 0{,}25) = 2$.

b) Știind că $a, b \in (0,1)$, demonstrați că $\log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right) + \log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \geq 2$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația: $\lg(4^{x-2} + 9) + \lg 2 \leq \lg(2^{x-2} + 1) + 1$.

Subiectul 4.

a) O echipă de proiect este formată din 3 profesori și 5 elevi. În câte moduri se poate forma o delegație alcătuită din 5 persoane astfel încât ea să conțină cel puțin 3 elevi?

b) Un autoturism se deplasează cu viteza de 90 km/h la vale, cu 72 km/h pe loc drept și cu 60 km/h la deal. În aceste condiții autoturismul a parcurs distanța de la Iași la Brașov în 5 ore, iar distanța de la Brașov la Iași în 4 ore. Aflați distanța de la Iași la Brașov.

Notă:
Timp de lucru 3 ore;
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.